Thermodynamique et mécanique des fluides – Chapitre 1

Rappels de mécanique – TD

Exercice 1 : Question de cours

On suppose que la Terre décrit une trajectoire circulaire de rayon R autour du Soleil et de période de révolution T.

On donne :

- $G = 6{,}67.10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ la constante gravitationnelle ;
- $M_\mathrm{S} = 1{,}99.10^{30}\,\mathrm{kg}$ la masse du Soleil.

1. Établir la troisième loi de Kepler.

2. En déduire la valeur du rapport $\dfrac{T^2}{R^3}$.

Correction :

1. La Terre de masse m n'étant soumise qu'à la force gravitationnelle exercée par le Soleil, l'application du PFD en coordonnées cylindriques donne : $m\,\vec{a} = \vec{F}_\mathrm{g} = -\dfrac{G\,m\,M_\mathrm{S}}{r^2}\,\vec{e}_r$, soit en projetant : $m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right) = -\dfrac{G\,m\,M_\mathrm{S}}{r^2}$.

La vitesse angulaire peut s'exprimer sur cette trajectoire circulaire : $\dot{\theta} = \dfrac{2\,\pi}{T}$. Comme $\ddot{r} = 0$, on obtient : $-m\,R\left(\dfrac{2\,\pi}{T}\right)^2 = -\dfrac{G\,m\,M_\mathrm{S}}{R^2}$, et on établit alors la troisième loi de Kepler : $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{4\,\pi^2}{G\,M_\mathrm{S}}$.

2. On obtient : $\dfrac{T^2}{R^3} = 2{,}97.10^{-19}\,\mathrm{s^2\cdot m^{-3}}$.

Exercice 2 : Mise en rotation d'un moteur

On étudie la mise en rotation d'un rotor (partie mobile d'un moteur) de moment d'inertie $J = 10{,}7.10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ autour de son axe. Celui-ci est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant $I = 0{,}1\,\mathrm{A}$ qui traverse le stator (partie fixe d'un moteur), soit $C_\mathrm{m} = k\,I$, avec $k = 22.10^{-3}\,\mathrm{N\cdot m\cdot A^{-1}}$.

1. En négligeant les frottements, déterminer l'équation vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ du rotor.

2. Résoudre cette équation pour obtenir l'expression $\omega(t)$, en supposant que le rotor est au repos à l'instant initial.

3. Calculer le temps t_0 pour atteindre la vitesse de consigne $\omega_0 = 1\,800\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Le rotor subit en réalité un couple de frottement solide $C_\mathrm{s} = -400\,\mathrm{\mu N\cdot m}$ et un couple de frottement fluide $C_\mathrm{f} = -\lambda\,\omega$, avec $\lambda = 1{,}0.10^{-6}\,\mathrm{N\cdot m\cdot s}$.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$, puis la résoudre.

5. Quelle est la vitesse angulaire maximale que peut atteindre le rotor ?

6. Déterminer le temps t_1 pour atteindre 95% de la valeur maximale.

7. L'effet des frottements est-il négligeable sur le temps de mise en rotation du rotor ?

Correction :

1. Comme le rotor n'est soumis qu'au couple C_m, l'application du TMC donne : $J\,\dot{\omega} = C_\mathrm{m} = k\,I$, d'où : $\dot{\omega} = \dfrac{k\,I}{J}$.

2. On l'intègre l'équation précédente : $\omega(t) = \dfrac{k\,I}{J}\,t + \mathrm{cste} = \dfrac{k\,I}{J}\,t$, comme le rotor est au repos à l'instant initial.

3. On a : $\omega(t_0) = \omega_0$, soit : $\dfrac{k\,I}{J}\,t_0 = \omega_0$, d'où : $t_0 = \dfrac{\omega_0\,J}{k\,I} = 0{,}88\,\text{s}$.

4. Le rotor est soumis aux trois couples, l'application du TMC donne donc : $J\,\dot{\omega} = C_\text{m} + C_\text{s} + C_\text{f} = k\,I + C_\text{s} - \lambda\,\omega$, d'où l'équation différentielle : $\dot{\omega} + \dfrac{\lambda}{J}\,\omega = \dfrac{k\,I + C_\text{s}}{J}$.

La solution de l'équation différentielle est de la forme : $\omega(t) = A\,\text{e}^{-\frac{\lambda}{J}\,t} + \dfrac{k\,I + C_\text{s}}{\lambda}$, avec A une constante.

Comme $\omega(t=0) = 0$, on en déduit : $A = -\dfrac{k\,I + C_\text{s}}{\lambda}$, d'où finalement : $\omega(t) = \dfrac{k\,I + C_\text{s}}{\lambda}\left(1 - \text{e}^{-\frac{\lambda}{J}\,t}\right)$.

5. La vitesse angulaire est maximale lorsque $t \to +\infty$, d'où : $\omega_\text{max} = \dfrac{k\,I + C_\text{s}}{\lambda} = 1{,}8.10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

6. On a : $\omega(t_1) = \dfrac{95}{100}\,\omega_\text{max}$, soit : $\dfrac{k\,I + C_\text{s}}{\lambda}\left(1 - \text{e}^{-\frac{\lambda}{J}\,t_1}\right) = \dfrac{95}{100}\,\omega_\text{max}$, d'où : $t_1 = -\dfrac{J}{\lambda}\ln\left(\dfrac{5}{100}\right) = 3{,}2\,\text{s}$.

7. En présence de frottements, la mise en rotation du rotor est bien plus longue ($t_1 > t_0$), les frottements ne sont donc pas négligeables.

Exercice 3 : Pétrolier

Les pétroliers sont des navires-citernes de grandes tailles servant au transport du pétrole.

On considère un pétrolier de longueur $L = 100\,\text{m}$, de largeur $\ell = 20\,\text{m}$ et de hauteur $H = 30\,\text{m}$, que l'on assimile à un parallélépipède rectangle. Il possède une masse à vide $M = 20\,000\,\text{t}$, et la densité du pétrole qu'il contient est $d = 0{,}80$.

1. Déterminer la hauteur h du pont du pétrolier par rapport au niveau de l'eau lorsqu'il est à vide.

Pour des raisons de sécurité, le pont du pétrolier doit être à une hauteur minimale $h_\text{min} = 10\,\text{m}$ au-dessus du niveau de l'eau.

2. Calculer le volume maximal V_max de pétrole que peut contenir le pétrolier.

Correction :

1. On note z l'axe vertical ascendant.

Le pétrolier est soumis à deux forces lorsqu'il est à vide :

- son poids : $\vec{P} = -M\,g\,\vec{e}_z$;
- la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la hauteur $(H-h)$ immergée dans l'eau : $\vec{\Pi} = m_\text{eau,déplacé}\,g\,\vec{e}_z = \rho_\text{eau}\,L\,\ell\,(H-h)\,g\,\vec{e}_z$, avec $\rho_\text{eau} = 1{,}0.10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'eau.

L'équilibre des forces donne : $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$, soit : $-M\,g + \rho_\text{eau}\,L\,\ell\,(H-h)\,g = 0$, d'où la hauteur du pont : $h = H - \dfrac{M}{\rho_\text{eau}\,L\,\ell} = 20\,\text{m}$.

2. Lorsque le pétrolier contient un volume V de pétrole, il faut ajouter le poids du pétrole au bilan des forces : $\vec{P}' = -m_\text{pétrole}\,g\,\vec{e}_z = -d\,\rho_\text{eau}\,V\,g\,\vec{e}_z$.

L'équilibre des forces donne : $\vec{P} + \vec{P}' + \vec{\Pi} = \vec{0}$, soit : $-M\,g - d\,\rho_\text{eau}\,V\,g + \rho_\text{eau}\,L\,\ell\,(H-h)\,g = 0$, d'où l'expression du volume : $V = \dfrac{\rho_\text{eau}\,L\,\ell\,(H-h) - M}{d\,\rho_\text{eau}}$.

Le volume maximale V_max correspondant à une hauteur h_min, d'où : $V_\text{max} = \dfrac{\rho_\text{eau}\,L\,\ell\,(H-h_\text{min}) - M}{d\,\rho_\text{eau}} = 2{,}5.10^4\,\text{m}^3$.

Exercice 4 : Piège à électrons

On considère un électron de masse $m = 9{,}1.10^{-31}\,\text{kg}$ et de charge $q = -e = -1{,}6.10^{-19}\,\text{C}$ qui est libre de se déplacer le long de l'axe (Oz). Un dispositif de piégeage lui confère une énergie potentielle :

$$E_\text{p}(z) = \frac{e\,V_0}{2\,d^2}\,z^2$$

avec $V_0 = 5{,}0\,\text{V}$ et $d = 4{,}0\,\text{mm}$. On suppose que l'énergie mécanique de l'électron est conservée au cours de son mouvement.

1. Montrer que l'électron réalise des oscillations harmoniques dans le piège.

2. Calculer la fréquence de ces oscillations.

Correction :

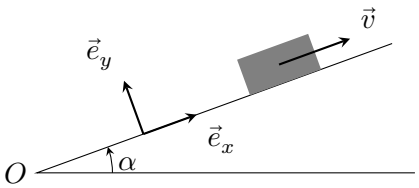
1. L'énergie mécanique de l'électron s'exprime : $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2 + \dfrac{e\,V_0}{2\,d^2}\,z^2$.

Par conservation de l'énergie mécanique, on a : $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = 0$, soit : $m\,\dot{z}\,\ddot{z} + \dfrac{e\,V_0}{d^2}\,z\,\dot{z} = 0$, d'où l'équation d'un oscillateur harmonique : $\ddot{z} + \dfrac{e\,V_0}{m\,d^2}\,z = 0$.

2. La fréquence des oscillations est : $f = \dfrac{\omega_0}{2\,\pi} = \dfrac{1}{2\,\pi}\sqrt{\dfrac{e\,V_0}{m\,d^2}} = 3{,}7.10^7\,\mathrm{Hz} = 37\,\mathrm{MHz}$.

Exercice 5 : Glissement sur un plan incliné

Une masse $m = 600\,\mathrm{g}$ est lancée depuis le bas d'un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. L'axe (Ox) est parallèle au plan incliné, et l'axe (Oy) est perpendiculaire au plan incliné, comme schématisé ci-dessous.



La masse est lancée initialement depuis le point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$, où $v_0 = 3{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. On considère dans un premier temps que la masse glisse sur le plan incliné sans frottement.

1. Établir l'équation du mouvement lors de la montée, puis en déduire la loi horaire $x(t)$.

2. Calculer l'instant où la masse s'arrête avant de redescendre, ainsi que la distance qu'elle a parcouru.

3. Calculer l'instant où la masse est revenue en O.

On tient maintenant compte des frottements solides. La réaction du support est alors $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_\mathrm{n} + \overrightarrow{R}_\mathrm{t}$, avec $\overrightarrow{R}_\mathrm{n}$ la réaction normale au plan incliné et $\overrightarrow{R}_\mathrm{t}$ la réaction tangentielle (c'est-à-dire les frottements). On précise que pour un solide qui glisse sur un support, les réactions vérifient : $\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{t}\right\| = f\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{n}\right\|$, avec un coefficient de frottement $f = 0{,}2$ dans ce cas.

4. Établir l'équation du mouvement lors de la montée, puis en déduire la loi horaire $x(t)$.

5. Calculer l'instant où la masse s'arrête avant de redescendre, ainsi que la distance qu'elle a parcouru.

Lorsque la masse s'arrête, la force de frottement solide est modifiée. On précise que pour un solide qui ne glisse pas sur un support, les réactions vérifient : $\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{t}\right\| \leqslant f\left\|\overrightarrow{R}_\mathrm{n}\right\|$.

6. Déterminer le sens de la force de frottement lorsque la masse s'immobilise.

7. Calculer l'angle limite α_lim au-delà duquel la masse reste immobile sans redescendre en glissant.

Correction :

1. La masse est soumise à deux forces :

- son poids $\overrightarrow{P} = -m\,g\cos\alpha\,\vec{e}_y - m\,g\sin\alpha\,\vec{e}_x$;
- la réaction normale du support $\overrightarrow{R}_\mathrm{n} = R_\mathrm{n}\,\vec{e}_y$.

L'application du PFD donne : $m\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}_\mathrm{n}$. En projetant selon x, on obtient : $m\,\ddot{x} = -m\,g\sin\alpha$, d'où l'équation différentielle : $\ddot{x} = -g\sin\alpha$.

En intégrant, on obtient : $\dot{x} = -g\sin\alpha\,t + C_1$, et on détermine la constante C_1 à partir de la condition initiale : $\dot{x}(t=0) = v_0 = C_1$, d'où : $\dot{x} = -g\sin\alpha\,t + v_0$.

En intégrant encore une fois, on obtient : $x(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\sin\alpha\,t^2 + v_0\,t + C_2$, et on détermine la constante C_2 à partir de la condition initiale : $x(t=0) = 0 = C_2$, d'où la loi horaire : $x(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\sin\alpha\,t^2 + v_0\,t$.

2. La masse s'arrête à l'instant t_1 tel que : $\dot{x}(t_1) = 0$, d'où : $t_1 = \dfrac{v_0}{g \sin\alpha} = 1{,}0\,\text{s}$.

La distance parcourue lorsque la masse s'arrête est : $d = x(t_1) = -\dfrac{1}{2} g \sin\alpha t_1^2 + v_0\, t_1 = \dfrac{v_0^2}{2\, g \sin\alpha} = 1{,}8\,\text{m}$.

3. La masse est de retour en O à l'instant t_2 tel que : $x(t_2) = 0 = -\dfrac{1}{2} g \sin\alpha t_2^2 + v_0\, t_2$, d'où : $t_2 = \dfrac{2\, v_0}{g \sin\alpha} = 2{,}1\,\text{s}$.

4. En prenant en compte la réaction tangentielle $\vec{R}_\text{t} = R_\text{t}\, \vec{e}_x$ dans le PFD, on obtient : $m \dfrac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = \vec{P} + \vec{R}_\text{n} + \vec{R}_\text{t}$.

En projetant selon x, on obtient : $m\, \ddot{x} = -m\, g \sin\alpha + R_\text{t}$.

En projetant selon y, on obtient : $0 = -m\, g \cos\alpha + R_\text{n}$, d'où : $R_\text{n} = m\, g \cos\alpha$.

Comme les frottements s'opposent au mouvement, on a $R_\text{t} < 0$ pendant la montée, et puisque $R_\text{n} > 0$ on en déduit : $R_\text{t} = -f\, R_\text{n} = -f\, m\, g \cos\alpha$.

L'équation du mouvement est donc : $\ddot{x} = -g\,(\sin\alpha + f \cos\alpha)$.

Comme l'équation du mouvement a la même forme que précédemment, il suffit de remplacer $(\sin\alpha)$ par $(\sin\alpha + f\cos\alpha)$ pour obtenir la loi horaire : $x(t) = -\dfrac{1}{2} g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)\, t^2 + v_0\, t$.

5. On en déduit que l'instant où la masse s'arrête est : $t_1' = \dfrac{v_0}{g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0{,}67\,\text{s}$.

La distance parcourue est : $d' = \dfrac{v_0^2}{2\, g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 1{,}2\,\text{m}$.

6. Si la masse est immobile, la somme des forces doit se compenser. On en déduit que la force de fortement est dirigée selon $+\vec{e}_x$, elle retient la masse et l'empêche de glisser.

7. Si la masse est immobile, l'équilibre impose : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{R}_\text{n} + \vec{R}_\text{t}$.

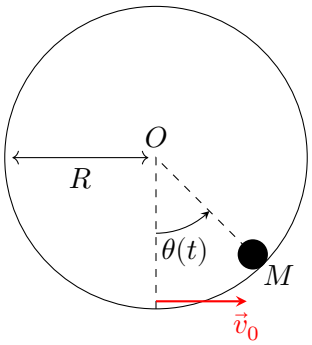
En projetant selon x, on obtient : $0 = -m\, g \sin\alpha + R_\text{t}$, d'où : $R_\text{t} = m\, g \sin\alpha$.

En projetant selon y, on obtient : $0 = -m\, g \cos\alpha + R_\text{n}$, d'où : $R_\text{n} = m\, g \cos\alpha$.

La masse reste immobile à partir d'un angle limite α_lim tel que : $R_\text{t} = f\, R_\text{n}$, soit : $m\, g \sin\alpha_\text{lim} = m\, g \cos\alpha_\text{lim}$, d'où : $\alpha_\text{lim} = \arctan f = 11°$.

Exercice 6 : Mouvement dans un tube

On considère une bille, assimilée à un point matériel de masse m, qui se déplace sans frottement à l'intérieur d'un tube cylindrique de rayon R, comme représenté ci-dessous. On note $\theta(t)$ l'angle qu'elle réalise par rapport à sa position initiale en bas du tube, où elle est lancée avec une vitesse horizontale de norme v_0.



1. À l'aide du théorème de l'énergie mécanique, exprimer la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ de la bille en fonction de $\theta(t)$, R, v_0 et g l'intensité de la pesanteur.

2. Montrer que la norme de la force de réaction du support peut s'exprimer :

$$N = m \left\{ \frac{v_0^2}{R} + g\,[3\cos\theta(t) - 2] \right\}.$$

3. Déterminer la vitesse $v_{0,\text{min}}$ en-dessous de laquelle la bille quitte le support sans réaliser un tour complet du cylindre.

4. Dans le cas où $v_0 < v_{0,\min}$, déterminer l'angle $\theta_{\lim}$ pour lequel la bille quitte le support.

Correction :

1. L'énergie mécanique de la bille s'exprime : $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}$, avec :

- $E_\mathrm{c} = \dfrac{1}{2}\,m\,v(t)^2 = \dfrac{1}{2}\,m\left[R\,\dot\theta(t)\right]^2$ son énergie cinétique
- $E_\mathrm{p} = m\,g\,z(t) + C = -m\,g\,R\cos\theta(t) + C$ son énergie potentielle de pesanteur, où C est une constante.

En l'absence de frottement, le théorème de l'énergie mécanique donne : $E_\mathrm{m}(t) - E_\mathrm{m}(t=0) = 0$, soit : $\dfrac{1}{2}\,m\,R^2\,\dot\theta(t)^2 - m\,g\,R\cos\theta(t) + C - \left(\dfrac{1}{2}\,m\,v_0^2 - m\,g\,R + C\right) = 0$, d'où : $\dot\theta(t) = \sqrt{\dfrac{v_0^2}{R^2} + \dfrac{2\,g\,[\cos\theta(t) - 1]}{R}}$.

2. La bille est soumise à deux forces :

- son poids $\overrightarrow{P} = m\,g\cos\theta(t)\,\vec e_r - m\,g\sin\theta(t)\,\vec e_\theta$;
- la réaction normale du support $\overrightarrow{N} = -N\,\vec e_r$, avec $N > 0$ sa norme.

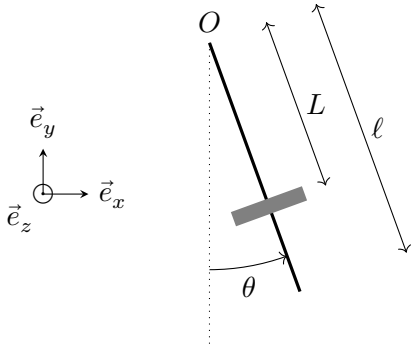
L'application du PFD donne : $m\,\vec a = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N}$, avec l'accélération en coordonnées cylindriques qui s'exprime : $\vec a = \left(\ddot r - r\,\dot\theta^2\right)\vec e_r + \left(2\,\dot r\,\dot\theta + r\,\ddot\theta\right)\vec e_\theta + \ddot z\,\vec e_z$, où $r = R = \text{cste}$ pour ce mouvement circulaire. On obtient en projetant selon $\vec e_r$: $-m\,R\,\dot\theta(t)^2 = m\,g\cos\theta(t) - N$, d'où : $N = m\,R\,\dot\theta(t)^2 + m\,g\cos\theta(t) = m\,R\left(\dfrac{v_0^2}{R^2} + \dfrac{2\,g\,[\cos\theta(t) - 1]}{R}\right) + m\,g\cos\theta(t) = m\left\{\dfrac{v_0^2}{R} + g\,[3\cos\theta(t) - 2]\right\}$.

3. La bille quitte le support lorsque la réaction normale $\overrightarrow{N}$ s'annule. Comme sa norme est minimale en $\theta = \pi$, où elle vaut $N = m\left[\dfrac{v_0^2}{R} - 5\,g\right]$, on en déduit que la vitesse minimale qui annule la norme est : $v_{0,\min} = \sqrt{5\,g\,R}$.

4. Dans le cas où $v_0 < v_{0,\min}$, la bille quitte le support lorsque $N = 0$, soit : $\dfrac{v_0^2}{R} + g\,(3\cos\theta_{\lim} - 2) = 0$, c'est-à-dire pour un angle : $\theta_{\lim} = \arccos\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{v_0^2}{3\,g\,R}\right)$.

Exercice 7 : Horloge à balancier

On modélise le balancier d'une horloge par une tige de masse m et de longueur ℓ pouvant tourner sans frottement autour de l'axe (Oz), sur laquelle est fixée un contrepoids de masse $M \gg m$ à une distance L de l'axe, comme schématisé ci-dessous.



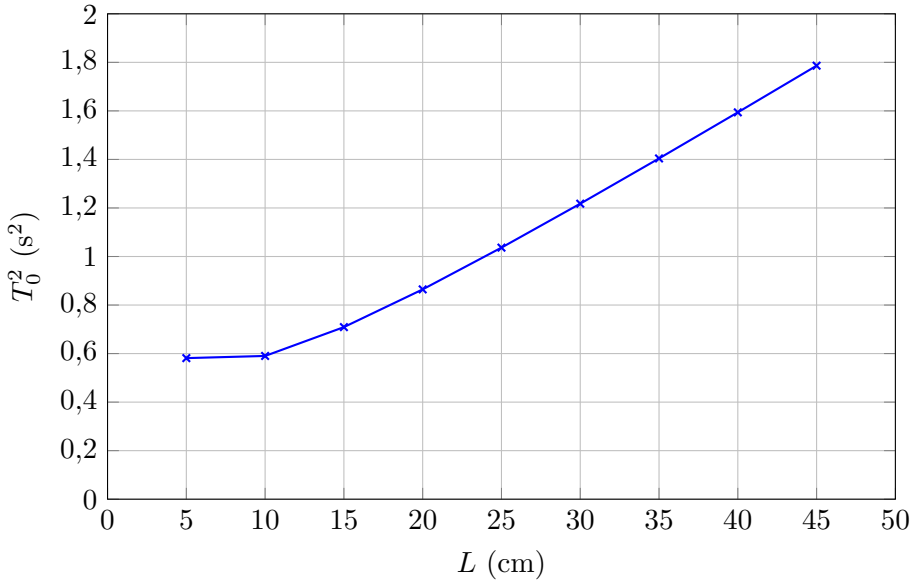
On souhaite étudier l'évolution de la période du balancier en fonction de la position du contrepoids pour des petites oscillations. On rappelle pour cela les expressions des moments d'inertie par rapport à l'axe (Oz) :

- de la tige : $J_\mathrm{t} = \dfrac{m\,\ell^2}{3}$;
- du contrepoids : $J_\mathrm{c} = M\,L^2$.

1. Sachant que le moment d'inertie d'un solide est une grandeur extensive, exprimer le moment d'inertie du balancier.

2. Déterminer l'expression de la période T_0 des petites oscillations du balancier.

On représente ci-dessous un relevé expérimental de T_0^2 en fonction de la position L.



3. Interpréter l'allure de cette courbe.
4. En déduire une mesure de la valeur de l'intensité de la pesanteur.

Correction :

1. Le moment d'inertie du balancier s'exprime alors : $J = J_\text{t} + J_\text{c} = \dfrac{m\,\ell^2}{3} + M\,L^2$.

2. Le balancier est soumis à trois forces :

- le poids de la tige $\overrightarrow{P}_\text{t} = -m\,g\,\vec{e}_y$, qui s'applique en son centre de gravité G_t, de moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) : $M_z(\overrightarrow{P}_\text{t}) = \left(\overrightarrow{OG}_\text{t} \wedge \overrightarrow{P}_\text{t}\right) \cdot \vec{e}_z = \left[\left(\dfrac{\ell}{2}\sin\theta\vec{e}_x - \dfrac{\ell}{2}\cos\theta\vec{e}_y\right) \wedge \left(-m\,g\,\vec{e}_y\right)\right] \cdot \vec{e}_z = -\dfrac{\ell\,m\,g}{2}\sin\theta$;
- le poids du contrepoids $\overrightarrow{P}_\text{c} = -M\,g\,\vec{e}_y$, qui s'applique en son centre de gravité G_c, de moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) : $M_z(\overrightarrow{P}_\text{c}) = \left(\overrightarrow{OG}_\text{c} \wedge \overrightarrow{P}_\text{c}\right) \cdot \vec{e}_z = \left[\left(L\sin\theta\vec{e}_x - L\cos\theta\vec{e}_y\right) \wedge \left(-M\,g\,\vec{e}_y\right)\right] \cdot \vec{e}_z = -L\,M\,g\sin\theta$;
- la réaction du support $\overrightarrow{R}$, qui s'applique au point O, de moment scalaire par rapport à l'axe (Oz) : $M_z(\overrightarrow{R}) = \left(\overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R}\right) \cdot \vec{e}_z = 0$.

L'application du théorème du moment cinétique au balancier donne : $J\,\ddot{\theta} = M_z(\overrightarrow{P}_\text{t}) + M_z(\overrightarrow{P}_\text{c}) + M_z(\overrightarrow{R})$, soit : $\left(\dfrac{m\,\ell^2}{3} + M\,L^2\right)\ddot{\theta} = -\dfrac{\ell\,m\,g}{2}\sin\theta - L\,M\,g\sin\theta$, avec $\sin\theta \approx \theta$ pour des petites oscillations, et on aboutit à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \dfrac{g\left(\frac{\ell\,m}{2} + L\,M\right)}{\frac{m\,\ell^2}{3} + M\,L^2}\,\theta = 0$.

Sa pulsation propre est : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g\left(\frac{\ell\,m}{2} + L\,M\right)}{\frac{m\,\ell^2}{3} + M\,L^2}}$, d'où l'expression de sa période : $T_0 = \dfrac{2\,\pi}{\omega_0} = 2\,\pi\sqrt{\dfrac{\frac{m\,\ell^2}{3} + M\,L^2}{g\left(\frac{\ell\,m}{2} + L\,M\right)}}$.

3. Comme $T_0^2 = 4\,\pi^2\,\dfrac{\frac{m\,\ell^2}{3} + M\,L^2}{g\left(\frac{\ell\,m}{2} + L\,M\right)}$, on en déduit que :

- lorsque L devient grand, comme $M \gg m$, on obtient : $T_0^2 \approx 4\,\pi^2\,\dfrac{M\,L^2}{g\,L\,M} = \dfrac{4\,\pi^2\,L}{g}$, ce qui est en accord avec la courbe où T_0^2 tend à croitre linéairement avec L ;
- lorsque L tend vers 0, on obtient : $T_0^2 \approx 4\,\pi^2\,\dfrac{\frac{m\,\ell^2}{3}}{g\,\frac{\ell\,m}{2}} = \dfrac{8\,\pi^2\,\ell}{3\,g}$, ce qui est en accord avec la courbe où T_0^2 tend vers une constante.

4. Lorsque L devient grand, la pente de l'asymptote est : $p = \dfrac{4\,\pi^2}{g}$, et on mesure sur la courbe : $p \approx \dfrac{1{,}8\,\mathrm{s}^2}{45\,\mathrm{cm}} = 4{,}0\,\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$, d'où on en déduit : $g = \dfrac{4\,\pi^2}{p} = 9{,}9\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, ce qui est très proche de la valeur attendue.

Exercice 8 : Course de voitures télécommandées

Alice et Bernard réalisent une course avec leurs nouvelles voitures télécommandées. La voiture d'Alice possède une accélération de $2\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ et une vitesse limitée à $12\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$, tandis que celle de Bernard accélère à $3\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ mais sa vitesse plafonne à $10\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

1. Qui gagne la course dans l'allée du jardin qui fait $15\,\mathrm{m}$?

2. Quelle distance le perdant doit-il proposer pour la revanche afin d'être sûr de gagner ?

Correction :

1. Les mouvements des voitures est composé de deux phases : une première phase d'accélération uniforme a_i, puis une seconde phase à vitesse constante v_i.
Pour la première phase, le PFD donne : $\ddot{x} = a_i$. En intégrant, on obtient : $\dot{x} = a_i\,t + C_1$, avec la constante $C_1 = 0$ en supposant que la vitesse initiale est nulle. On intègre à nouveau : $x = \dfrac{1}{2}\,a_i\,t^2 + C_2$, avec la constante $C_2 = 0$ en supposant que la voiture part de l'origine O, d'où l'équation horaire sur cette phase : $x(t) = \dfrac{1}{2}\,a_i\,t^2$.
La voiture a atteint sa vitesse limite v_i après un temps τ_i tel que : $\dot{x}(\tau_i) = v_i = a_i\,\tau_i$, soit : $\tau_i = \dfrac{v_i}{a_i}$.
Dans la seconde phase, la vitesse est constante : $\dot{x} = v_i$, soit : $x(t) = v_i\,t + C_3$, avec la constante C_3 que l'on détermine telle que : $x(\tau_i) = \dfrac{1}{2}\,a_i\,\tau_i^2 = v_i\,\tau_i + C_3$, d'où : $C_3 = \dfrac{1}{2}\,a_i\,\tau_i^2 - v_i\,\tau_i = \dfrac{1}{2}\,a_i\left(\dfrac{v_i}{a_i}\right)^2 - v_i\,\tau_i = -\dfrac{v_i^2}{2\,a}$.
Au final, l'équation horaire d'une voiture est : $x(t) = v_i\,t - \dfrac{v_i^2}{2\,a_i}$. Le temps T_i pour parcourir l'allée de longueur L est alors tel que : $x(T_i) = L = v_i\,T_i - \dfrac{v_i^2}{2\,a_i}$, d'où : $T_i = \dfrac{L}{v_i} + \dfrac{v_i}{2\,a_i}$.
On obtient $T_\mathrm{A} = 3{,}8\,\mathrm{s}$ pour Alice et $T_\mathrm{B} = 4{,}0\,\mathrm{s}$ pour Bernard, c'est donc Alice qui gagne la course.

2. Bernard l'emporte pour une distance L' si $T'_\mathrm{B} < T'_\mathrm{A}$, soit : $\dfrac{L'}{v_B} + \dfrac{v_B}{2\,a_B} < \dfrac{L'}{v_A} + \dfrac{v_A}{2\,a_A}$, d'où finalement : $L' < \left(\dfrac{v_A}{2\,a_A} - \dfrac{v_B}{2\,a_B}\right)\dfrac{v_A\,v_B}{v_A - v_B} = 6{,}2\,\mathrm{m}$.

Exercice 9 : Point matériel relié à un solide oscillant

On considère un point matériel M de masse m pouvant se déplacer le long d'un axe horizontal (Ox). Le point M est relié à un solide S par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Il est également soumis à une force de frottement fluide qui s'exprime : $\vec{f} = -\beta\,\vec{v}$, avec β une constante et $\vec{v}$ son vecteur vitesse.



Dans un premier temps, on suppose que la position du solide S est fixée sur l'axe horizontal tel que : $\overrightarrow{OS} = -\ell_0\,\vec{e}_x$. Le point M est lâché sans vitesse initiale depuis la position x_0 à l'instant $t = 0$, et présente ensuite un régime pseudo-périodique.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du point M, puis l'écrire sous forme canonique en définissant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.

2. En déduire l'expression de la position $x(t)$.

3. Sachant que l'amplitude du mouvement est réduite de moitié après 3 oscillations, déterminer la valeur de Q.

On suppose maintenant que le solide S oscille avec une pulsation ω tel que : $\overrightarrow{OS} = [-\ell_0 + a\cos(\omega\,t)]\,\vec{e}_x$. Le point M présente alors un régime sinusoïdal forcé.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ du point M, puis l'écrire sous forme canonique.

5. En déduire l'expression de l'amplitude X des oscillations en régime sinusoïdal forcé.

6. Représenter l'allure de l'amplitude X en fonction de la pulsation ω.

Correction :

1. Il s'exerce 4 forces sur le point M :

- son poids $\overrightarrow{P} = -m\,g\,\vec{e}_z$;
- la réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\vec{e}_z$;
- la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F} = -k\,[SM - \ell_0]\,\vec{e}_x$, avec $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM} = [\ell_0 + x(t)]\,\vec{e}_x$, soit : $\overrightarrow{F} = -k\,x(t)\,\vec{e}_x$;
- la force de frottement fluide $\vec{f} = -\beta\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x$.

L'application du PFD donne : $m\,\vec{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} + \vec{f}$, soit en projetant selon l'axe horizontal : $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x(t) - \beta\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, que l'on peut écrire sous forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x(t) = 0$, en posant :

- $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$, d'où : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$;
- $\dfrac{\beta}{m} = \dfrac{\omega_0}{Q}$, d'où : $Q = \dfrac{\omega_0\,m}{\beta} = \dfrac{\sqrt{k\,m}}{\beta}$.

2. La solution de cette équation différentielle en régime pseudo-périodique s'exprime sous la forme : $x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\,t}\,[A\cos(\omega\,t) + B\sin(\omega\,t)]$, avec $\omega = \omega_0\,\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\,Q^2}}$, et on détermine les constantes A et B à l'aide des conditions initiales :

- $x(t=0) = x_0$, soit : $\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\times 0}\,[A\cos(0) + B\sin(0)] = x_0$, d'où : $A = x_0$;
- $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$, soit : $-\dfrac{\omega_0}{2\,Q}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\times 0}\,[x_0\cos(0) + B\sin(0)] + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\times 0}\,\omega\,[-x_0\sin(0) + B\cos(0)] = 0$, d'où : $B = \dfrac{\omega_0}{2\,Q\,\omega}\,x_0$;

et on obtient finalement : $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\,t}\left[\cos(\omega\,t) + \dfrac{\omega_0}{2\,Q\,\omega}\sin(\omega\,t)\right]$.

3. L'amplitude après 3 oscillations est telle que : $x(t = 3\,T) = \dfrac{x_0}{2}$, avec $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega}$, soit : $x_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}\,\frac{6\,\pi}{\omega}}\left[\cos\left(\omega\,\dfrac{6\,\pi}{\omega}\right) + \dfrac{\omega_0}{2\,Q\,\omega}\sin\left(\omega\,\dfrac{6\,\pi}{\omega}\right)\right] = \dfrac{x_0}{2}$, d'où : $x_0\,\mathrm{e}^{-\frac{3\,\pi}{Q\,\sqrt{1-\frac{1}{4\,Q^2}}}} = \dfrac{x_0}{2}$, et on en déduit : $Q = \sqrt{\left[\dfrac{3\,\pi}{\ln(2)}\right]^2 + \dfrac{1}{4}} = 14.$

4. Comme $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM} = [\ell_0 - a\cos(\omega\,t) + x(t)]\,\vec{e}_x$, la force de rappel du ressort s'exprime maintenant : $\overrightarrow{F} = -k\,[x(t) - a\cos(\omega\,t)]\,\vec{e}_x$, et la projection du PFD selon l'axe horizontal donne : $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x(t) + k\,a\cos(\omega\,t) - \beta\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, que l'on peut écrire sous forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x(t) = \omega_0^2\,a\cos(\omega\,t)$.

5. En représentation complexe, l'équation différentielle donne : $-\omega^2\,\underline{X}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\mathrm{j}\,\omega\,\underline{X}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} + \omega_0^2\,\underline{X}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t} = \omega_0^2\,a\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$, d'où l'expression de l'amplitude complexe : $\underline{X} = \dfrac{\omega_0^2\,a}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\,\frac{\omega\,\omega_0}{Q}}$, et on en déduit alors l'expression de l'amplitude : $X = |\underline{X}| = \dfrac{\omega_0^2\,a}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2\,\omega_0^2}{Q^2}}}$.

6. On commence par calculer les deux limites :

- $X(\omega = 0) = a$;
- $X(\omega \to \infty) = 0$.

Si $X(\omega)$ présente un maximum, il correspond au minimum de son dénominateur, qui est atteint pour la pulsation $\omega = \omega_0$, et on obtient : $X(\omega = \omega_0) = a\,Q$. Il s'agit bien d'un maximum comme $Q > 1$.

On représente alors l'allure de l'amplitude X en fonction de la pulsation ω :

